作业讲解与微积分复习

习题课 1 · 概率论与数理统计

复旦大学经济学院　ECON130001

前 45 分钟：作业讲解

1. **习题 1-2**（概率的性质、古典概型、几何概型）：1、3、5、7、9、11
2. **习题 1-3**（条件概率、乘法法则、全概率公式、贝叶斯定理）：2、4、6、11、12、13
3. **习题 1-4**（独立性）：4、6、10

重点讲四道：1-2 第 11 题、1-3 第 4 题、1-3 第 12 题、1-4 第 10 题。

习题 1-2 第 1、3 题：概率的性质

第 1 题

$A \subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$。求 (1) $P(\overline{A})$，$P(\overline{B})$；(2) $P(AB)$；(3) $P(A\cup B)$；(4) $P(\overline{A}B)$；(5) $P(\overline{A}\,\overline{B})$，$P(\overline{B}A)$。

解

关键：$A \subset B$ 时 $AB=A$，$A\cup B=B$。

(1) 0.6，0.4；　(2) $P(AB)=P(A)=0.4$；　(3) $P(A\cup B)=P(B)=0.6$；

(4) $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.2$；

(5) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=0.4$，$P(\overline{B}A)=P(A)-P(AB)=0$。

第 3 题

$P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$。求 $P(B-A)$ 与 $P(A-B)$。

解

先求交：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4$。

$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3$，$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.1$。

$P(B-A)=P(B)-P(AB)$，**不是** $P(B)-P(A)$。后者只在 $A\subset B$ 时成立（第 1 题正是这种情形）。

习题 1-2 第 5、7 题：排列计数

第 5 题

书架上有一部五卷册的文集，求各册自左至右或自右至左恰好排成自然顺序的概率。

解

五册的排法共 $A_5^5 = 5! = 120$ 种，等可能；符合要求的只有正序、倒序 2 种：

$$P = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

第 7 题

n 个朋友随机地围绕圆桌就座，求其中指定的两个人座位相邻的概率。

解

先让甲坐下。乙在其余 $n-1$ 个座位上等可能，其中与甲相邻的有 2 个：

$$P = \frac{2}{n-1} \quad (n \geq 3)$$

验算：$n = 3$ 时概率为 1——三人围坐，任意两人都相邻。

习题 1-2 第 9 题：抽检中的次品数

题

设有 N 件产品，其中 M 件次品，从中任取 n 件。(1) 求恰有 k 件次品的概率（$k \le \min\{M, n\}$）；(2) 求至少有 2 件次品的概率。

解

(1) 从 N 件中取 n 件，共 C_N^n 种取法；恰有 k 件次品，即从次品中取 k 件、从正品中取 $n-k$ 件：

$$P = \frac{C_M^k \, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

(2) 「至少 2 件」的对立事件是「0 件或 1 件」：

$$P = 1 - \frac{C_{N-M}^n + C_M^1 \, C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$$

「至少……」类问题，先看对立事件是否更简单：这里正面要加 $2, 3, \ldots$ 许多项，反面只有两项。

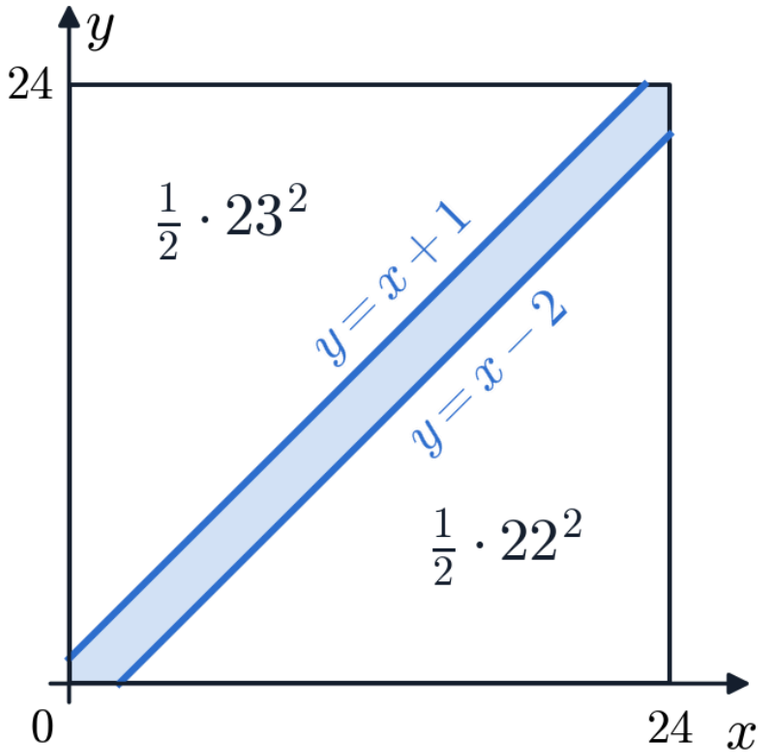
习题 1-2 第 11 题：两艘船停靠泊位

题

两艘船都要停靠同一泊位，它们可能在一昼夜（24 h）的任意时刻到达，停靠时间分别为 1 h 和 2 h。求有一艘船需要等待的概率。

一种到达情况，就是正方形里的一个点

记停 1 h 的船在 x 时到达，停 2 h 的船在 y 时到达。点 (x, y) 落在正方形 $[0, 24]^2$ 内，落在任一区域的概率与该区域的面积成正比（几何概型）。



正方形中的每个点，对应两艘船的一种到达情况

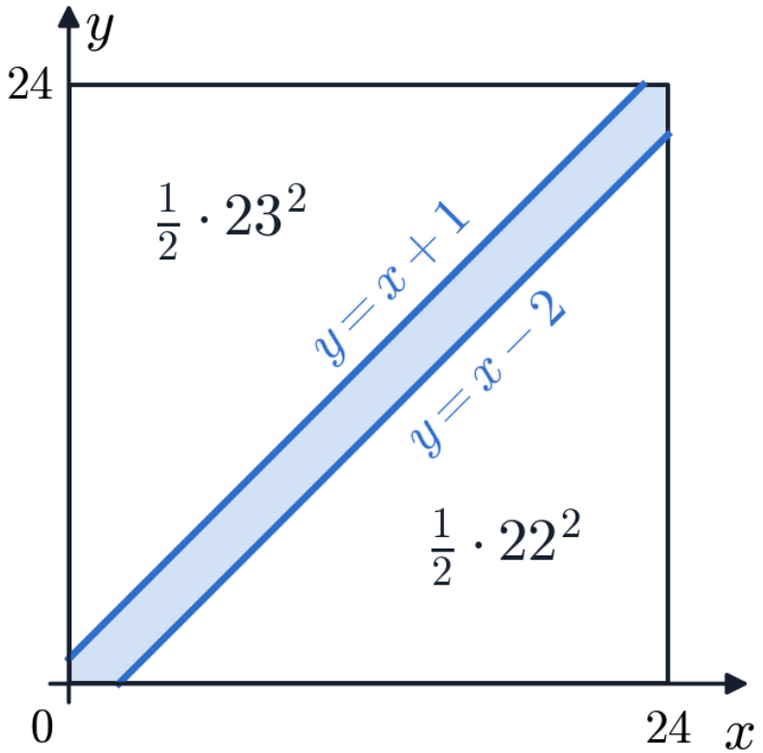
第 11 题（续）：什么时候需要等待

什么时候需要等待

停 1 h 的船先到：它在 $x+1$ 时离开，另一艘在此之前到达就要等，即 $x \le y < x+1$。例如它 8:00 到，另一艘 8:30 到，要等半小时。

停 2 h 的船先到：它在 $y+2$ 时离开，即 $y \le x < y+2$。例如它 8:00 到，另一艘 9:30 到，仍要等。

合起来：$x-2 < y < x+1$，即右图的阴影带。



阴影带：需要等待

第 11 题（续）：用面积算概率

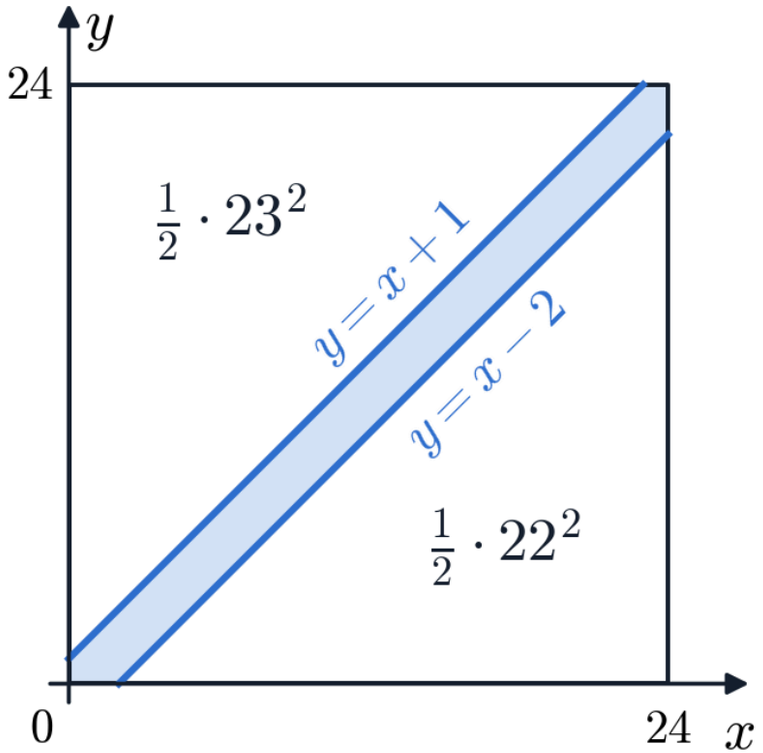
算面积

直接算阴影带不方便，改算带外的两个三角形：

$y \geq x+1$：左上的三角形，直角边 $24-1=23$；

$y \leq x-2$：右下的三角形，直角边 $24-2=22$。

$$P = 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot 23^2 + \frac{1}{2}\cdot 22^2}{24^2} = \frac{139}{1152} \approx 0.121$$



带外两个三角形：不需要等待

习题 1-3 第 2、4 题：条件概率的两种算法

第 2 题

$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid A)=0.8$，求 $P(AB)$ 及 $P(\overline{A}\,\overline{B})$。

解：乘法法则 $P(AB)=P(A)\,P(B\mid A)=0.4$；$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-(0.5+0.6-0.4)=0.3$。

第 4 题

掷两颗骰子，已知点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率。分别用条件概率的定义、样本空间的收缩计算。

方法一：定义

记 A = 点数之和为 7，B = 有一颗为 1 点。$P(A)=\frac{6}{36}$；$AB=\{(1,6),(6,1)\}$，$P(AB)=\frac{2}{36}$：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

方法二：样本空间的收缩

已知和为 7，样本空间收缩为 6 个结果：$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$。其中有 1 点的 2 个：

$$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

习题 1-3 第 6 题：波利亚模型

题

袋中有 r 个红球、t 个白球。每次任取一球，观察颜色后放回，并再放入 a 个与取出的球同色的球。连续取球四次，求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解

记 A_i = 第 i 次取到红球。由乘法法则：

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(\overline{A}_3 \mid A_1A_2)\,P(\overline{A}_4 \mid A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$= \frac{r}{r+t} \cdot \frac{r+a}{r+t+a} \cdot \frac{t}{r+t+2a} \cdot \frac{t+a}{r+t+3a}$$

这个模型描述什么

取到红球后，袋中红球变多，下一次再取到红球的可能性随之增大：**某种结果出现得越多，就越容易再出现**。这个模型由 Eggenberger 与 Pólya 于 1923 年提出，最初用来描述传染病的传播：已出现的病例越多，下一个人被感染的可能性越大。

习题 1-3 第 11 题：信号传输

题

两种信息分别编码为 X 和 Y 传送。X 被误收作 Y 的概率为 0.02，Y 被误收作 X 的概率为 0.01；X 与 Y 传送的频繁程度之比为 $2:1$。若接收站收到的是 X，求原发信息也是 X 的概率。

解

记 A = 发出 X，B = 收到 X。已知 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(B\mid A)=1-0.02=0.98$，$P(B\mid \overline{A})=0.01$。由贝叶斯定理：

$$P(A\mid B)=\frac{0.98\times\frac{2}{3}}{0.98\times\frac{2}{3}+0.01\times\frac{1}{3}}=\frac{1.96}{1.97}=\frac{196}{197}\approx 0.995$$

题目给的是误收的概率 0.02，分子要用的是正确接收的概率 $1-0.02=0.98$。

习题 1-3 第 12 题：两箱零件

题

第一箱 50 件，其中 10 件一等品；第二箱 30 件，其中 18 件一等品。任挑一箱，从中不放回地依次取两件。求：(1) 第一次取出一等品的概率；(2) 已知第一次取出一等品，第二次仍是一等品的概率。

解

记 H = 挑中第一箱，A_i = 第 i 次取到一等品。

(1) 全概率公式：$P(A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50} + \frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30} = 0.4$。

(2) $P(A_1A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49} + \frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29}$，

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{690}{1421} \approx 0.486$$

常见错误

写成 $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{49} + \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{29} \approx 0.385$。错在仍用 $\frac{1}{2}$ 给两箱加权：第一次取到一等品之后，挑中哪一箱的可能性已经变了。

按贝叶斯定理更新：$P(H \mid A_1) = \frac{1}{4}$，$P(\overline{H} \mid A_1) = \frac{3}{4}$，于是 $\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{49} + \frac{3}{4}\cdot\frac{17}{29} \approx 0.486$，与左边一致。

习题 1-3 第 13 题：一道证明

题

设 A、B 为两个事件，若 $P(A \mid B) = 1$，证明 $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1$。

证

由 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = 1$ 得 $P(AB) = P(B)$。于是

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A)} = 1$$

（题中隐含 $P(B) > 0$、$P(A) < 1$，否则两个条件概率没有定义。）

可以对照逻辑里的逆否命题来理解：「B 发生则 A 发生」与「A 不发生则 B 不发生」是同一件事。

习题 1-4 第 4、6 题：独立性

第 4 题

A 与 B 相互独立，$P(A)=\alpha$，$P(B)=\beta$。求 (1) $P(A\cup B)$；(2) $P(A\cup \overline{B})$；(3) $P(\overline{A}\cup \overline{B})$。

解

A、B 独立时，A 与 $\overline{B}$ 也独立。

(1) $\alpha+\beta-\alpha\beta$；

(2) $\alpha+(1-\beta)-\alpha(1-\beta)=1-\beta+\alpha\beta$；

(3) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1-\alpha\beta$。

第 6 题

三人独立地破译一份密码，各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。求至少一人能译出的概率。

解

对立事件是「三人都译不出」：

$$P=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

用三个事件的加法公式要算七项，结果相同；取对立事件只需一行。

习题 1-4 第 10 题：先下手为强

题

甲、乙两人射击水平相当，约定轮流对同一目标射击，直到有人命中为止，命中的一方获胜。先射击的一方是否一定占优？为什么？

解

设每次命中的概率为 p，记 $q = 1 - p$（$0 < q < 1$）。甲先射，甲在第 1、3、5、…… 次射击时命中才获胜，此前各次都未命中：

$$P(\text{甲胜}) = p + q^2 p + q^4 p + \cdots = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}$$

$$P(\text{乙胜}) = qp + q^3 p + \cdots = \frac{qp}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}$$

因为 $q < 1$，$\frac{1}{1+q} > \frac{q}{1+q}$：**先射击的一方一定占优。**

求和用的是等比级数，公比是 q^2，不是 q。

后 45 分钟：第 5 讲起要用的微积分

1. **复合函数求导**：链式法则
2. **变上限积分的求导**：积分上限是变量时，怎样对它求导
3. **分部积分**：乘积形式的被积函数怎样积分
4. **二重积分**：画图、求交、定限，化成两次定积分（本节重点）

从第 5 讲起，计算的主要工具会从排列组合换成积分与求导。今天逐一复习这四项基本功，每一项都按「法则 → 例题 → 练习」展开。

复合函数求导：链式法则

法则

若 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)=f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$$

要点

外层函数求导（里面原样保留），再乘内层函数的导数。

注意符号

内层函数递减时，它的导数是负数：$u=-x$ 时 $u'=-1$，$u=\dfrac{1}{x}$ 时 $u'=-\dfrac{1}{x^2}$。这个负号要一并乘进去。

例：用链式法则求导

例 1　$y=\sqrt{1+x^2}$

第一步　分层：外层 $f(u)=\sqrt{u}$，内层 $u=1+x^2$。

第二步　各自求导：$f'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$，$u'=2x$。

第三步　相乘，把 u 代回：

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

例 2　$y=e^{1/x}$　$(x\neq 0)$

第一步　分层：外层 $f(u)=e^u$，内层 $u=\dfrac{1}{x}$。

第二步　各自求导：$f'(u)=e^u$，$u'=-\dfrac{1}{x^2}$。

第三步　相乘，把 u 代回：

$$y'=e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

例 2 的内层函数 $\dfrac{1}{x}$ 递减，导数为负，结果带一个负号。

练习 1：求导数

题

(1) e^{-2x}；　(2) $\ln(1+x^2)$；　(3) $\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 。

解

(1) 外层 e^u，内层 $u=-2x$：$e^{-2x}\cdot(-2)=-2e^{-2x}$。

(2) 外层 $\ln u$，内层 $u=1+x^2$：$\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$。

(3) 外层 $\sin u$，内层 $u=\dfrac{1}{x}$：$\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$。

练习 2：抽象函数的求导

什么是抽象函数

设 F 可导，但不知道它的具体表达式，只把它的导数记作 f，即 $F'=f$。链式法则照样适用：外层是 F，外层求导就得到 f。例如 $\big[F(2x)\big]'=f(2x)\cdot 2$。

题

对 $y>0$，求导数：(1) $G(y)=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})$；　　(2) $H(y)=1-F\left(\dfrac{1}{y}\right)$。

解

(1) $G'(y)=f(\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-f(-\sqrt{y})\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\dfrac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$。

(2) $H'(y)=-f\left(\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=\dfrac{1}{y^2}f\left(\dfrac{1}{y}\right)$。

两题各有两个负号相乘：一个是式子本身的减号，一个来自递减的内层函数（$-\sqrt{y}$ 与 $\dfrac{1}{y}$）。

变上限积分及其求导

什么是变上限积分

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的积分上限是变量 x，积分的结果随 x 变化，所以 Φ 是 x 的函数。积分变量写成 t，是为了和上限 x 区分开。

求导公式（f 连续）

① $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$

即：**对上限求导，就是把上限代进被积函数。**

例

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=\cos x$。验算：先积分，$\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=\sin x$；再求导，得 $\cos x$，两者一致。

上限或下限是函数时

两个公式（f 连续，u、v 可导）

② $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(u(x)\big)\,u'(x)$：上限是函数时，代入后再乘它的导数。

③ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(u(x)\big)\,u'(x) - f\big(v(x)\big)\,v'(x)$：下限也变时，减去下限那一项。

为什么

② 就是链式法则：外层是公式①，内层是 $u(x)$。③ 由 $\displaystyle\int_v^u = \int_a^u - \int_a^v$ 拆成两个②。

例

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}\cdot 2x$（公式②，$u = x^2$）。

验算：先积分，$\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x^2}$；再求导，得 $2xe^{-x^2}$，两者一致。

练习 3：变上限积分的求导

题

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$；　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^1 t^2\,\mathrm{d}t$；　(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \cos t\,\mathrm{d}t$ $(y>0)$ 。

解

(1) 公式②，$u=2x$：$e^{(2x)^2}\cdot 2 = 2e^{4x^2}$。$e^{t^2}$ 没有初等原函数，但求导不必先积出来。

(2) 下限是变量：先对调上下限，$\displaystyle\int_x^1 t^2\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t$，导数为 $-x^2$。

(3) 公式③：$\cos\sqrt{y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}} - \cos(-\sqrt{y})\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \dfrac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$。验算：原积分等于 $2\sin\sqrt{y}$，求导得同一结果。

(3) 与练习 2(1) 是同一件事：$F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)\,\mathrm{d}t$。

分部积分：公式

公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

定积分：$\displaystyle\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$。

公式从哪里来

乘积求导 $(uv)' = u'v + uv'$，两边积分，再移项。所以分部积分就是乘积求导法则倒过来用。

怎样选 u

u 选求导后变简单的（如 x、x^2、$\ln x$）；$\mathrm{d}v$ 选容易积分的（如 $e^x\,\mathrm{d}x$、$\sin x\,\mathrm{d}x$、$\cos x\,\mathrm{d}x$）。

例：分部积分

例　求 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

第一步　选取：$u=x$，$\mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x$。

第二步　求出 $\mathrm{d}u$ **与** v：$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=e^x$。

第三步　代入公式：

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$$

验算：$\left[(x-1)e^x\right]' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$。

选反了会怎样

若取 $u=e^x$，$\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x$，则 $v=\dfrac{x^2}{2}$：

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,\mathrm{d}x$$

剩下的积分里 x 的次数从 1 升到 2，比原来更难。

练习 4：分部积分

题

(1) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$；　(4) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$。

解

(1) $u=x$，$v=\sin x$：$x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$。

(2) 被积函数只有一项时，可以取 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$。$u=\ln x$，$v=x$：$x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$。

(3) 定积分的边界项也要代入上下限。$u=x$，$v=-e^{-x}$：$\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x=-e^{-1}+\left(1-e^{-1}\right)=1-\dfrac{2}{e}$。

(4) 用两次：取 $u=x^2$，得 $x^2e^x-2\int xe^x\,\mathrm{d}x$；后一项就是上一页的例题，结果为 $(x^2-2x+2)e^x+C$。

二重积分：化成两次定积分

从几何概型说起

第 2 讲的几何概型里，概率是面积之比，而区域 D 的面积就是 $\iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。被积函数换成一般的 $f(x,y)$，计算方法不变。

计算方法：先对一个变量积分，再对另一个

若 D 可以写成 $a \le x \le b$，$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x$$

内层对 y 积分时，把 x 看成常数；内层积完只剩 x，再对 x 积分。

定限三步

每道二重积分都按这三步做

1. **画图**：把所有约束画在同一张图上。
2. **求交**：区域由几组约束共同给出时，先求出公共部分。
3. **定限**：先定外层变量的范围；再在图上任取外层变量的一个值，看对应的竖条（或横条）从哪条线进入区域、从哪条线离开，读出内层变量的上下限。

两条检查

外层变量的上下限必须是常数；内层变量的上下限可以含外层变量，但不能含内层变量本身。

换一种积分次序再算一遍，结果必须相同。

例（一）：先对 y 积分

题

D 是以 $(0,0)$、$(1,0)$、$(1,1)$ 为顶点的三角形，即 $0 \le y \le x \le 1$。求 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

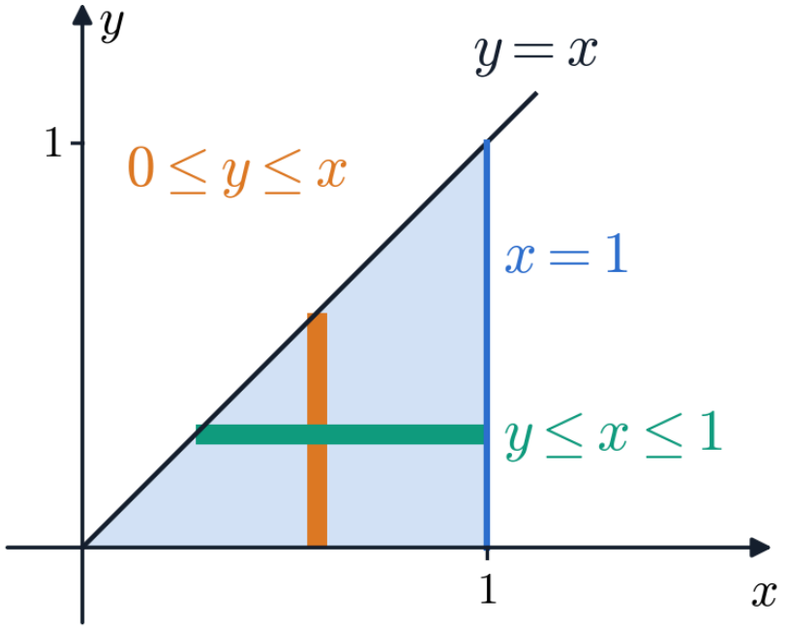
解

第一步　画图：见右图。

第二步　定限：外层 x 从 0 到 1；对每个 x，橙色竖条从 $y=0$ 进入区域、到 $y=x$ 离开，所以 y 从 0 到 x。

第三步　内层（x 看成常数）：$\displaystyle\int_0^x xy\,\mathrm{d}y = x\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$。

第四步　外层：$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$。



本页用橙色竖条：先对 y 积分

例（二）：同一道题，先对 x 积分

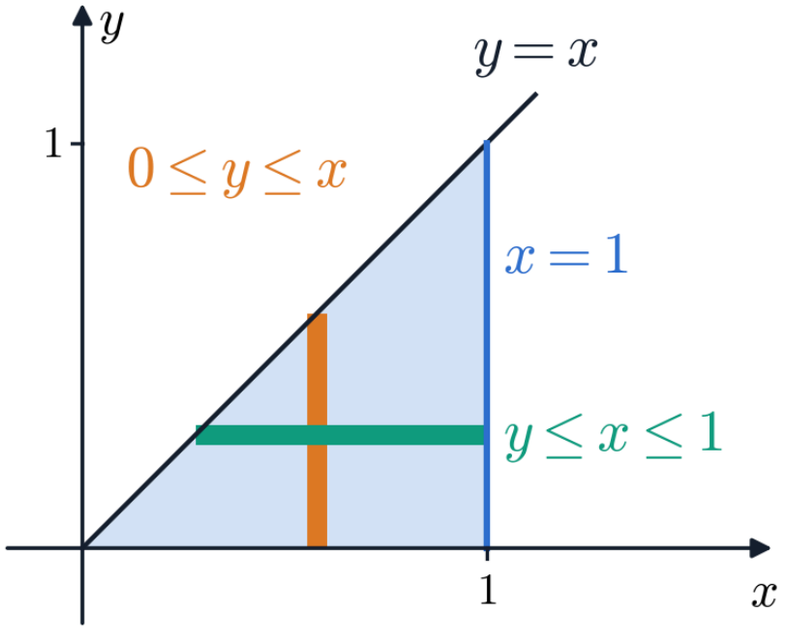
解

第二步　定限：外层 y 从 0 到 1；对每个 y，绿色横条从 $x=y$ 进入区域、到 $x=1$ 离开，所以 x 从 y 到 1。

第三步　内层（y 看成常数）：$\displaystyle\int_y^1 xy\,\mathrm{d}x = y\cdot\frac{1-y^2}{2}$。

第四步　外层：$\displaystyle\int_0^1 \frac{y-y^3}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$。

两种次序的积分限完全不同，结果必须相同。算完一种、再用另一种验算，可以检查定限是否正确。



本页用绿色横条：先对 x 积分

练习 5：两种次序，两套积分限

题

设 $D=\{(x,y):x^2\le y\le 1\}$。

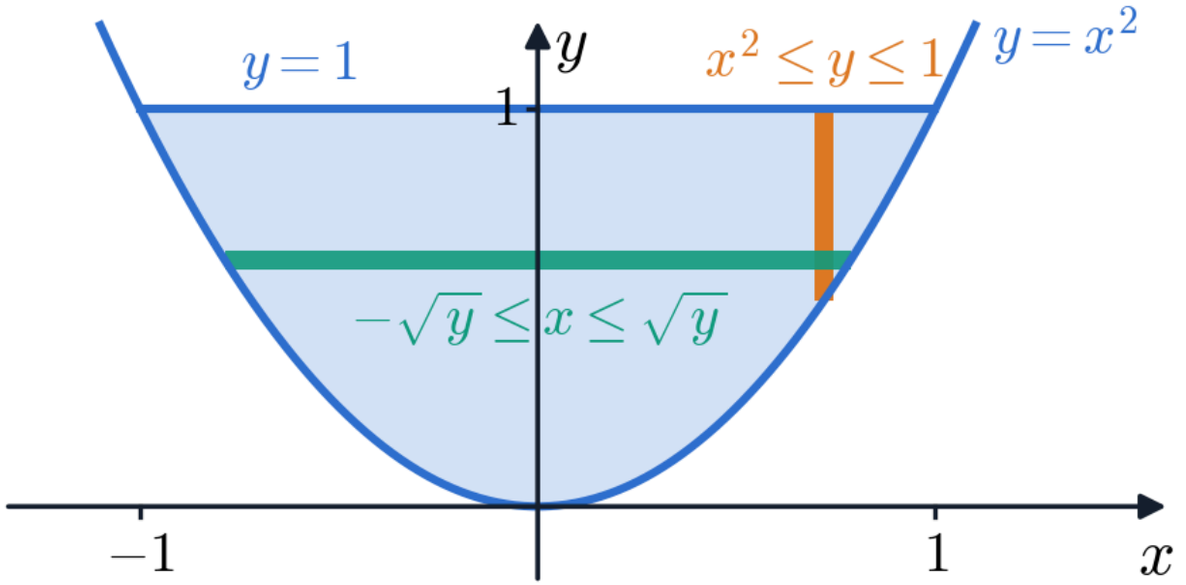
(1) 求常数 c，使 $\iint_D cy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$；

(2) 固定 x、沿竖条对 y 积分，得到 $g(x)$；固定 y、沿横条对 x 积分，得到 $h(y)$。

解

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}y\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^4}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$，故 $c=\dfrac{5}{4}$。

(2) 竖条：$g(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{1}\tfrac{5}{4}y\,\mathrm{d}y=\tfrac{5}{8}(1-x^4)$，$-1\le x\le 1$。



橙色竖条：y 从 x^2 到 1；绿色横条：x 从 $-\sqrt{y}$ 到 $\sqrt{y}$

横条：$h(y)=\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\tfrac{5}{4}y\,\mathrm{d}x=\tfrac{5}{2}\,y^{3/2}$，$0\le y\le 1$。

两次积分的限完全不同；算 $h(y)$ 时，$x<0$ 的那一半不能漏。

练习 6：求交之后，换个次序就不用分段

题

沿用练习 5 的 D 与 $c=\frac{5}{4}$，求 $\iint_{D\cap\{y\ge x\}} \frac{5}{4}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

解一：先对 y 积分，要分两段

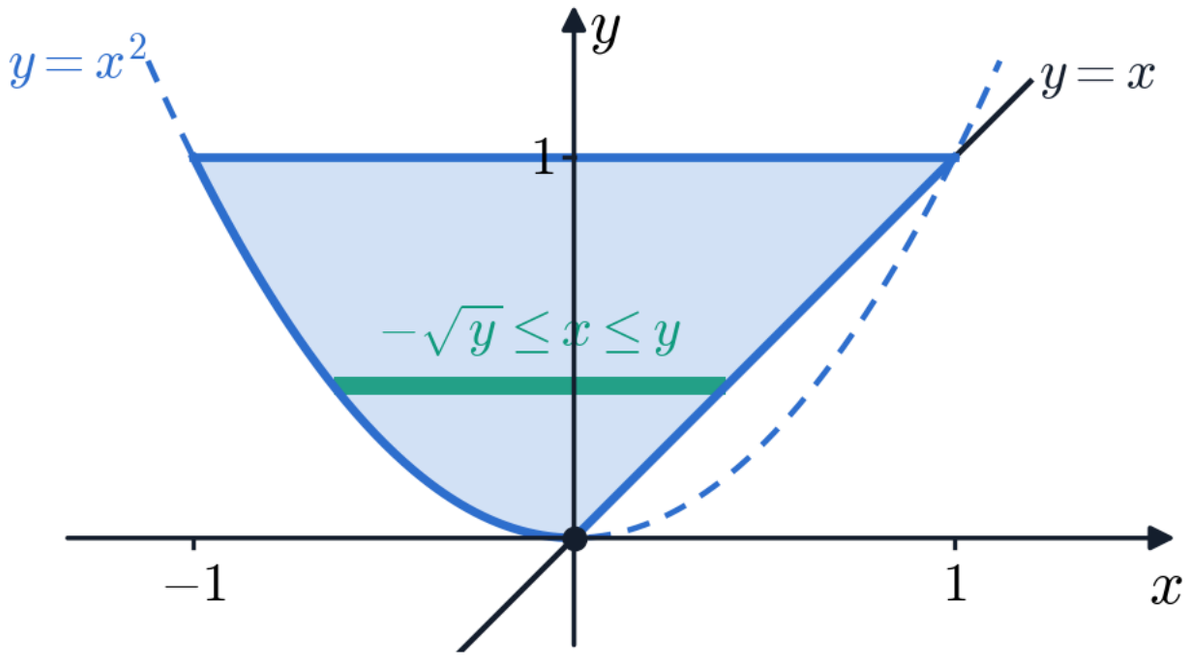
$x<0$ 时 $y\ge x$ 自动成立，下限是 x^2；$0\le x\le 1$ 时 $x\ge x^2$，下限是 x。

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\frac{5}{4}y\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{1}\frac{5}{4}y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}=\frac{11}{12}$$

解二：先对 x 积分，一段即可

对每个 $y\in[0,1]$，x 从 $-\sqrt{y}$ 到 y（因为 $y\le\sqrt{y}$）：

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{y}\frac{5}{4}y\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\int_{0}^{1}\left(y^2+y^{3/2}\right)\mathrm{d}y=\frac{11}{12}$$



下边界在原点处由 $y=x^2$ 转为 $y=x$

定限之前，先比较两种次序：哪一种不用分段，就用哪一种。

练习 7：交换积分次序

题

计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}y$。

解

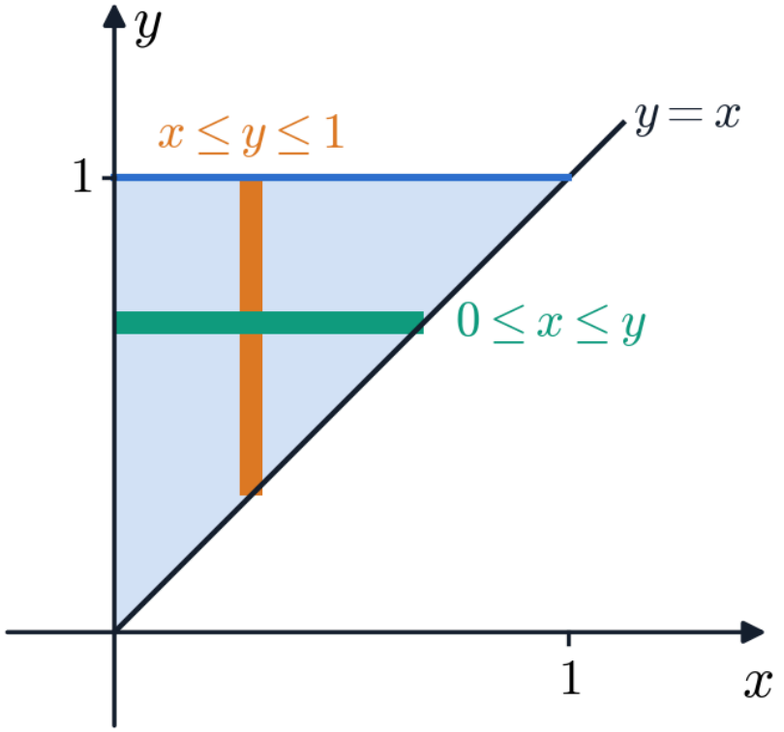
第一步　判断：e^{y^2} 没有初等原函数，按给定次序无法积出。

第二步　由积分限画出区域：$0 \le x \le 1$，$x \le y \le 1$，即三角形 $0 \le x \le y \le 1$。

第三步　按横条重新定限：y 从 0 到 1，x 从 0 到 y：

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y e^{y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y\,e^{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{e-1}{2}$$

交换次序时，积分限要从图上重新读出，不能把原来的上下限直接对调。



原次序是橙色竖条，换序后是绿色横条