第一次小测讲评

习题课三 · 2026秋季 A卷

概率论与数理统计 · 复旦大学经济学院

7道题 · 14个小问

题目与方法

题号	内容	解题依据
1	事件运算与独立性	先求交集概率，再写所求事件
2	球入盒	以每个球的去向构造等可能样本点
3	几何概型	把不等式化为平面区域
4	换球问题	按转入球的颜色分类
5	三局两胜	按实际结束比赛的路径分类
6	首次点击	区分已知未发生与未来等待
7	泊松分布与分布函数	先求参数，再合并得到服务的人数

第1题：题目与交集概率

题目

已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A\mid B)=0.3$。求恰好一个事件发生的概率，并判断是否独立。

先求两个事件同时发生的概率

$$P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)=0.4\times 0.3=0.12$$

第1题（1）：恰好一个发生

将事件分成互斥的两部分

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.5 - 0.12 = 0.38$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0.4 - 0.12 = 0.28$$

相加得到所求概率

$$\boxed{P = 0.38 + 0.28 = 0.66 = \frac{33}{50}}$$

第1题（2）：判断独立性

独立性判据

$$P(A)P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.20 \neq 0.12 = P(A \cap B)$$

因此两个事件不独立。

事件运算中的区别

$A \cup B$ 包含同时发生的情形；「恰好一个发生」要排除交集。

$$P(\text{恰好一个}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

第2题：球放入盒子

题目

4个不同的球分别独立、等可能地放入4个盒子，容量不限。求：（1）没有空盒；（2）第1号盒恰有2个球的概率。

等可能样本点

用四元组记录每个球所进入的盒子编号。每个球有4种选择。

$$|\Omega| = 4^4 = 256$$

第2题（1）：没有空盒

将条件转成排列问题

4个球放入4个盒子而没有空盒，意味着每盒恰好1个球。按盒子顺序安排4个不同的球。

$$|E| = 4! = 24$$

概率

$$\boxed{P(E) = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}}$$

第2题（2）：指定盒子恰有2球

分两步计数

先选择进入第1号盒的2个球；剩余2个球只能进入其他3个盒子。

$$|E| = \binom{4}{2} 3^2 = 54$$

$$\boxed{P(E) = \frac{54}{256} = \frac{27}{128}}$$

「恰好」限制剩余球的去向

若剩余球仍有4种去向，就会把第1号盒装入3球或4球的结果计入。分子应为 $\binom{4}{2}3^2$。

第3题：把不等式转为区域

题目

点 (x, y) 等可能地落在单位正方形内，区域概率与面积成正比。求：

（1）$|x - y| < \frac{1}{2}$；　（2）$y \geq x^2$ 且 $x \geq y^2$。

几何概型

$$P(E) = \frac{\text{区域 } E \text{ 的面积}}{1}$$

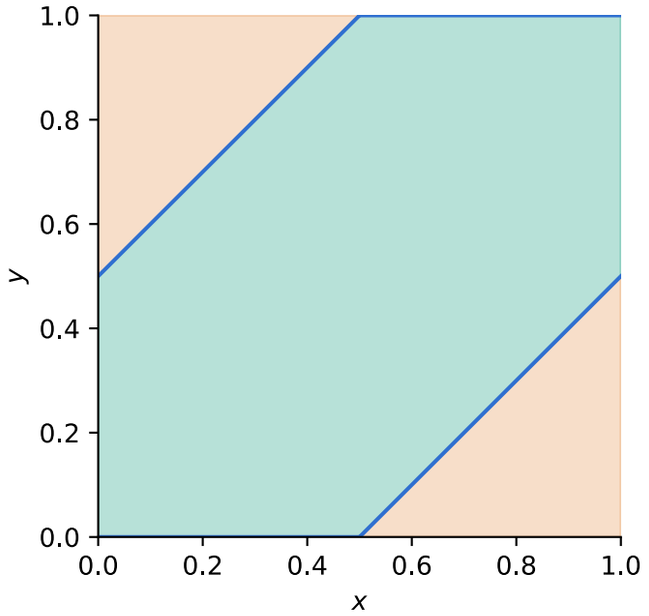
第3题（1）：取对立区域

对立区域的两个三角形

$|x-y| \geq \frac{1}{2}$ 对应两个直角边长为 $1/2$ 的三角形。

$$P(|x-y| \geq \tfrac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(|x-y| < \tfrac{1}{2}) = \frac{3}{4}}$$



绿色区域为所求事件；橙色为其对立区域

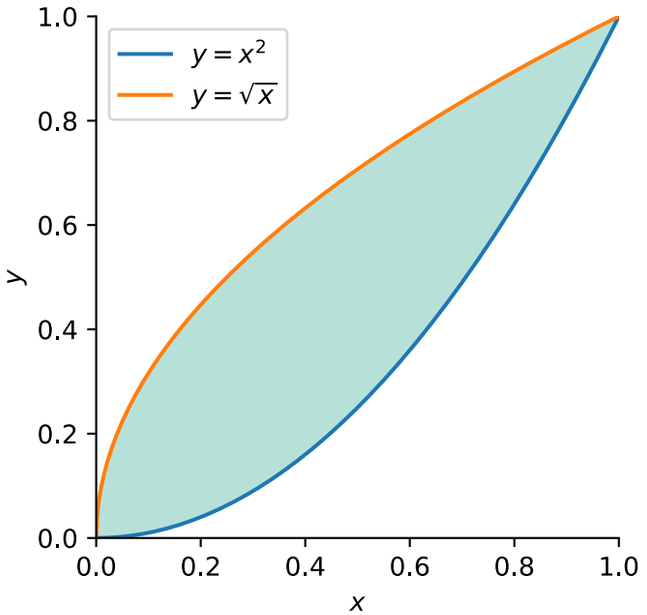
第3题（2）：确定上下边界

利用非负取值化简不等式

在单位正方形中，$x \geq y^2$ 等价于 $y \leq \sqrt{x}$。

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

两曲线的交点满足 $x^2 = \sqrt{x}$，在本区域中得到 $x = 0, 1$。



固定x时，竖直截线从x²延伸至√x

第3题（2）：积分计算面积

上边界减下边界

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \boxed{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

两条条件需同时满足

「且」对应区域的交集。分别计算两个区域的面积后相加，不能得到本题概率。

第4题：换球问题

题目

甲袋有3白2黑，乙袋有2白3黑。先从甲袋任取1球转入乙袋，再从乙袋任取1球。求取出白球的概率；已知取出白球，求转入的也是白球的概率。

定义两次抽取对应的事件

H：转入乙袋的是白球；W：最终从乙袋取出白球。

$$P(H)=\frac{3}{5},\qquad P(\overline{H})=\frac{2}{5}$$

第4题（1）：按转入球的颜色分类

转入情形	概率	转入后的乙袋	取白球概率
白球H	3/5	3白3黑，共6球	3/6
黑球	2/5	2白4黑，共6球	2/6

全概率公式

$$P(W)=\frac{3}{5}\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\frac{2}{6}=\frac{9}{30}+\frac{4}{30}=\boxed{\frac{13}{30}}$$

第4题（2）：给定取白球后的概率

先计算交集，再除以条件事件概率

$$P(H \cap W) = P(H)P(W \mid H) = \frac{3}{5}\frac{3}{6} = \frac{9}{30}$$

$$\boxed{P(H \mid W) = \frac{P(H \cap W)}{P(W)} = \frac{9/30}{13/30} = \frac{9}{13}}$$

条件的方向

$P(W \mid H) = 3/6$ 是已知转入白球后再取白球的概率；本问已知的是最终取白球，所求为 $P(H \mid W)$。

第5题：三局两胜

题目

甲每局胜率 $p=3/5$，乙每局胜率 $q=2/5$，各局独立。先胜两局者赢得比赛。求甲赢的概率；已知甲赢，求恰好打了三局的概率。

按实际比赛路径分类

比赛在一方取得第二场胜利时结束。甲赢的路径为：甲甲、甲乙甲、乙甲甲。

第5题（1）：把获胜路径的概率相加

路径	结束局数	概率
甲 → 甲	2	$p^2 = 9/25$
甲 → 乙 → 甲	3	$pqp = 18/125$
乙 → 甲 → 甲	3	$qp^2 = 18/125$

三条路径互斥

$$\boxed{P(\text{甲赢}) = p^2 + 2p^2q = \frac{9}{25} + \frac{36}{125} = \frac{81}{125}}$$

第5题（2）：已知甲赢，是否打满三局

分子是两个条件同时成立

$$P(\text{三局且甲赢}) = P(\text{甲乙甲}) + P(\text{乙甲甲}) = \frac{36}{125}$$

$$\boxed{P(\text{三局} \mid \text{甲赢}) = \frac{36/125}{81/125} = \frac{4}{9}}$$

不能用所有打满三局的比赛作分子

打满三局还可能由乙获胜。条件概率的分子只保留「打满三局且甲获胜」的路径。

第6题：首次点击的等待次数

题目

每条推送被点击的概率为0.2，各条相互独立。X为第一次点击时已收到的推送条数。求P(X≥4)；已知前3条未点击，求恰在第5条第一次点击的概率。

几何分布

$$P(X=k)=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\frac{1}{5},\qquad k=1,2,\ldots$$

第6题（1）：至少等待4条

将等待次数改写为前三条的结果

$X \geq 4$ 意味着前3条都未点击；第4条是否点击不影响这个事件。

$$\boxed{P(X \geq 4) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}}$$

区分≥与>

$X > 4$ 要求前4条都未点击，其概率为 $(4/5)^4$。指数由确定未点击的条数决定。

第6题（2）：已等待3条后的首次点击

用条件概率核对

$$
\begin{aligned}
P(X=5 \mid X>3) &= \frac{P(X=5)}{P(X>3)} \\
&= \frac{(4/5)^4(1/5)}{(4/5)^3} \\
&= \boxed{\frac{4}{25}}.
\end{aligned}
$$

从剩余等待过程理解

前3条的结果已知。之后只需第4条不点击、第5条点击，概率为(4/5)(1/5)。这对应重新开始等待后，恰在第2条推送时首次点击。

第7题：到达人数与实际服务人数

题目

一小时到达人数 X 服从泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$。窗口最多服务2人，实际服务人数记为 Y。求参数与 Y 的分布函数。

先明确两个变量的关系

$$Y=\min(X,2)$$

0人到达时服务0人；1人到达时服务1人；2人或更多人到达时服务2人。

第7题（1）：从单点概率反求参数

代入泊松概率函数

$$\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

按教材中泊松参数 $\lambda > 0$ 的约定，两边约去 $\lambda e^{-\lambda}$：

$$1 = \frac{\lambda}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lambda = 2}$$

第7题（2）：先求Y的分布律

Y取值	对应的X事件	概率
0	X=0	e^{-2}
1	X=1	$2e^{-2}$
2	X≥2	$1-3e^{-2}$

达到服务上限时合并所有到达情况

$Y=2$ 对应 $X=2,3,4,\ldots$，其概率为 $P(X\geq 2)$，不能只取 $P(X=2)$。

第7题（2）：按取值区间累计概率

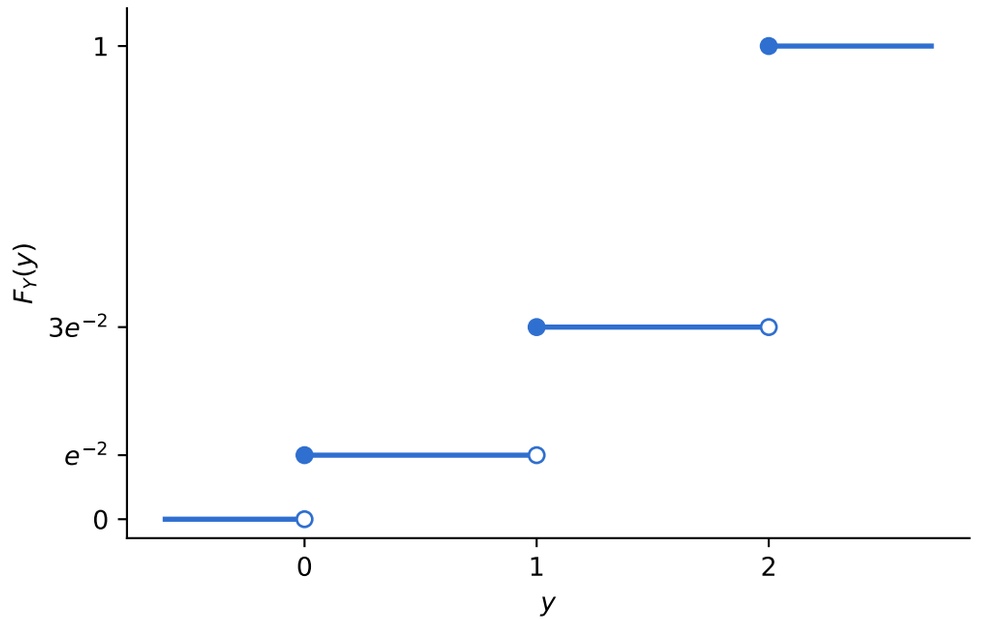
分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ e^{-2}, & 0\le y<1,\\ 3e^{-2}, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$$

端点取值

$F_Y(0)$ 已计入 $P(Y=0)$；$F_Y(1)$ 已计入0、1两项；$F_Y(2)=1$。分段表达式在跳跃点取右侧值。

第7题：分布函数的阶梯图



实心点为端点实际取值，空心点为左侧极限

由跳跃高度恢复分布律

在0处跳跃 e^{-2}，在1处跳跃 $2e^{-2}$，在2处跳跃 $1-3e^{-2}$。

各跳跃高度非负，合计为1。